Концепция авторской программы по математике для высокомотивированных школьников

Я. И. Абрамсон,
Школа «Интеллектуал» г. Москва
yakovabramson@mail.ru

Аннотация.

Обсуждается проект углублённого и ускоренного обучения математике по авторской программе мотивированных детей с 1-го по 11-ый классы и промежуточный анализ этого эксперимента, идущего 3-ий год в начальных классах в ГБОУ «Интеллектуал».

Стремительное развитие математики и физики всё более увеличивает сумму знаний, необходимых выпускникам физико-математических факультетов университетов для выведения их на передний край современного состояния этих наук. В то же время математика — это по-прежнему область знаний, в которой важнейшие результаты делаются, в подавляющем большинстве случаев, молодыми людьми.

Программы же по математике как в ВУЗах, так и в старших классах физико-математических школ и без того уже перегружены, по крайней мере, в том виде, в котором они сегодня существует. Резерв имеется лишь в первых шести классах школы.

С другой стороны, за время пребывания в начальной школе у большинства детей отбивается напрочь интерес к математике, формируется стереотип о ней как о науке застывшей и мёртвой, наподобие латыни, состоящей из мнемонических правил, которые надо вызубривать. Разумеется, для прошедших сквозь это горнило и «уцелевших» благодаря семьям, поддерживающим этот интерес домашними занятиями, кружками, к 7–8 классам предоставляют свои услуги специализированные физико-математические школы, существующие, как правило, в крупных городах.

Автор не ставит перед собой задачу глобального изменения качества преподавания математики в массовой школе — для этого нет предпосылок, да и, пожалуй, в этом и нет необходимости. Для поддержания конкурентоспособности страны в области высоких технологий необходимо относительно небольшое количество высоких профессионалов, имеющих фундаментальную математическую подготовку.

А для этого достаточно иметь сеть школ в крупных областных центрах страны и, особенно, таких мегаполисах, как Москва, Петербург, Самара, Казань, Новосибирск и др., предоставляющих особую, интенсивную и углублённую программу развития для высокомотивированных детей, начиная с первого класса, *отобранных по конкурсу.*

Ведь не возникает же сомнений в том, что, с одной стороны, учить детей музыке, языкам, гимнастике и фигурному катанию лучше всего в раннем возрасте, начиная с 5–7 лет, а, с другой стороны, не всякий ребёнок имеет природные склонности, способности к этим занятиям! Не все одарены ростом, гибкостью, координированностью, быстроте реакций, музыкальным слухом. И потому отбор в спортивные школы, музыкальные и балетные училища вызывает понимание. Но ведь и математические способности встречаются не у всех, а, с другой стороны, необходимость их развивать с ранних лет не менее актуальна, чем та же задача в отношении языков, музыки и спорта.

Пожалуй, я бы говорил не столько о математических способностях (хотя для опытного педагога не составляет труда в течение нескольких занятий определить предрасположенность ребёнка к математике в возрасте 6–7 лет), сколько о любопытстве, любознательности, упорстве, способности фокусировать своё внимание на одной задаче в течение длительного времени, не бросая её из-за того, что она не поддаётся.

Внимательное наблюдение за ребёнком в процессе решения им разного рода «задач на смекалку» позволяет сделать выводы о целесообразности его обучения по предлагаемой программе с неменьшей степенью обоснованности, чем принимаемые решения в этом же возрасте преподавателями музыки или бальных танцев.

Интересно отметить, что во всех трёх приёмно-отборочных кампаниях в первый класс школы «Интеллектуал» мнения нескольких педагогов — преподавателей русского языка, биологии (проводивших занятия по предмету «окружающий мир»), математики, психолога и завуча начальной школы совпали в итоге почти по всем кандидатурам! Разногласий особых не было, несмотря на то, что в последний раз, когда этот отбор проводился, конкурс составлял уже 20 человек на место.

Значительная часть детей младшего школьного возраста, особенно дети, посещавшие развивающие дошкольные курсы, получившие широкую разностороннюю подготовку дома (чтение, рисование, лепка, собирание «Лего», музыка), испытывают острый интеллектуальный голод, придя в школу и не получая там адекватной умственной нагрузки. Сегодняшняя начальная школа в отношении преподавания математики, особенно контингенту так называемых «одарённых детей», совершенно неадекватна их возможностям, запросам и потребностям.

Применение совершенно новых программ с применением современных педагогических технологий, опирающихся на ТПФУДиП[1] проф. П.Я. Гальперина позволяет, как нам кажется, в значительной мере решить эту проблему.

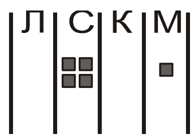
В ходе продолжающегося эксперимента в ГБОУ «Интеллектуал» в 2010–2011, 2011–2012 и 2012–2013 учебных годах преподавание математики по описываемой методике осуществлялось 4 часа в неделю, в двух классах по 16 детей в каждом. Класс набора 2010 года заканчивает сейчас третий класс, класс, набранный в 2011-ом, соответственно — второй.

[1] Теория Поэтапного Формирования Умственных Действий и Понятий.

В первом классе были пройдены следующие темы: запись чисел в позиционных системах счисления, сложение и вычитание многозначных чисел в различных системах счисления, первое знакомство с геометрией, умножение многозначных чисел на однозначные, деление многозначных чисел на однозначные, возведение однозначных чисел в степень, свойства операции возведения в степень, извлечение корня и взятие логарифма. Разумеется, всё это в натуральных числах и в случаях, когда эти операции выполнимы (в рамках натуральных чисел).

Знакомство с позиционными системами счисления мы начинаем с двоичной. Преимущество по сравнению с десятичной: можно наглядно продемонстрировать большое количество разрядов, легче записывать (всего два знака) и проще процедуры поразрядного сложения и вычитания. Числа дети записывают фломастерами на *пластиковых досках* (разлинованных в клеточку): рука у них ещё не поставлена и выводить каракулями ручками или карандашами в тетрадях заняло бы гораздо больше времени и сил. Кроме того, результаты они показывают и учитель сразу видит со своего места у кого правильно и может соответственно поощрять успешных учеников и корректировать ход урока.

Сами числа дети выкладывают с помощью кубиков на партах (первый, материализованный этап). В качестве ориентировочных основ для выполнения операции записи чисел выступают условные «звери». Так, один кубик — это стоимость одной мышки, две мышки (два кубика) стоят одну кошку, две кошки — одну собаку, две собаки — лису и т.д. Звери обозначаются их заглавными первыми буквами — М, К, С, Л,…



Число «пять»

Число (учитель называет устно) изображается кубиками и затем раскладывается на разграфлённых листах.

Затем число записывается с помощью символов (в двоичной системе).

Переход к троичной системе осуществляется после того, как примерно половина детей успешно осваивает запись в двоичной.

Характерным здесь является тот момент, что мы *не дожидаемся, пока все ученики овладеют записью чисел в двоичной системе.* Дело в том, что во время записи чисел в троичной системе происходит закрепление навыка у тех, у кого он уже сформировался на базе двоичной и понимание алгоритма у тех, у кого оно не сформировалось ещё ранее, так как по существу происходит повторение. Этот приём — наложение слегка изменённого алгоритма на ещё не отработанный старый, является существенным ускорителем при прохождении материала. При таком подходе во-первых, экономится время, а, во-вторых, дети воспринимают запись в троичной системе как нечто новое и ощущение новизны позволяет избежать утомления от однообразных упражнений.

Дальше всё продолжается вплоть до десятичной системы.

Использование пластиковых досок и поощрение правильных ответов «звёздочками» *вместо оценок* позволяет поддерживать высокий темп урока (что очень важно при работе с детьми младшего школьного возраста). С другой стороны, это исключает отрицательные эмоции, связанные с выставлением неудовлетворительных оценок (неправильные ответы и решения, равно как и их отсутствие, никак не оцениваются).

Естественно, дети объясняют все свои действия, проговаривая вначале их *вслух*, постепенно сокращая промежуточные этапы. Если вначале мы пишем числа подряд (один, два, три, четыре,…) то затем начинаем «прыгать»: «четырнадцать», «семнадцать». «двадцать один».

Переходя к сложению, мы демонстрируем на кубиках свойства сложения: коммутативность и ассоциативность. Затем показываем, как, используя эти свойства, удобно складывать числа, записанные в двоичной системе счисления, разбивая складываемые числа по разрядам — мышкам, кошкам и т.д. Складывая мышек с мышками, кошек с кошками и производя при этом необходимые замены (мышек кошками, кошек собаками и т. д.) мы быстро осваиваем поразрядное сложение.

Двоичность системы позволяет *наглядно демонстрировать многозначные числа* на кубиках. Опыт показывает, что вместо того, чтобы складывать много двузначных чисел, достаточно пару раз сложить десятизначные числа, чтобы освоить алгоритм сложения «в столбик». Поэтому мы не разбиваем единую тему сложения на подтемы, как это принято в некоторых учебниках, «сложение в пределах 10», «сложение двузначных чисел», «сложение с переходом через десяток», «сложение трёхзначных чисел» и т.д.

Аналогичным образом происходит и выработка алгоритма вычитания «в столбик». И вновь мы сразу же оперируем с многозначными числами и проходим по позиционным системам, начиная с простейшей из них, двоичной, и заканчивая привычной для нас десятичной. Отметим, однако, следующий важный момент. Операцию вычитания мы определяем не как физическое «отнимание» или уменьшение данного количества, а как ответ на вопрос — что надо прибавить к такому-то известному числу, чтобы получить другое заданное число. То есть, как решение уравнения $a + x = b$. Это, с одной стороны, облегчит в дальнейшем обоснование необходимости введения отрицательных чисел, а с другой стороны позволяет в одной схеме описывать и другие обратные операции — деления, извлечения корня и взятия логарифма.

Прежде чем приступать к умножению, мы на пару месяцев отправляемся знакомиться с первыми понятиями по геометрии, чтобы в дальнейшем связать операцию умножения с площадью прямоугольников. Прямоугольники затем используются для наглядной иллюстрации свойств умножения (и сложения) — коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Прежде всего, мы обсуждаем на уроке как мы даём определения каким-либо новым словам, понятиям. Анализируя это и прослеживая процесс в обратную сторону (а с помощью чего мы определили это, а как мы определили то, с помощью чего определили и т.д.), мы приходим к пониманию необходимости *неопределяемых понятий*. Точно так же, анализируя доказываемые утверждения, мы приходим к необходимости постулирования каких-то утверждений и называем их *аксиомами*.

При неторопливом и аккуратном ведении уроков, эти понятия на первоначальном уровне вполне доступны тому контингенту 7-летних детей, о которых идёт речь.

Затем наступает время для обсуждения мотивировки некоторых неопределяемых понятий: точки, прямой и плоскости. Обсуждается источники в окружающем нас мире, при идеализации которых мы получаем эти понятия. Сам момент идеализации тоже отмечается: мы никогда не имеем дела с реальными точками, как бы малы ни были интересующие нас объекты, так же как не встречаем и идеально тонких, прямых и бесконечно длинных объектов.

Затем мы обсуждаем понятие «равенства» фигур в геометрии. Мы называем равенством то, что позже назовём конгруэнцией — возможность совместить полностью фигуры наложением. При этом мы анализируем сам процесс этого «наложения», подводя детей к важнейшему понятию геометрических преобразований. Так, например, если речь идёт о треугольниках, мы говорим, что сравниваемые треугольники как бы сделаны из тонкой жести, и их нельзя сгибать и растягивать. Один из них остаётся на месте, а другой (предварительно вырезанный из листа жести, на котором он нарисован), мы подносим к нему, чтобы попытаться наложить его и проверить на равенство.

Мы обсуждаем сам процесс этого перемещения треугольника, как твёрдого тела, в пространстве. Что мы при этом можем делать, на какие элементарные движения можно разложить этот процесс. Выясняем, что можно «нести прямо» (трансляция вдоль вектора), «крутить-вертеть» (поворачивать вокруг оси) и «переворачивать» (отражать симметрично относительно прямой на плоскости). При этом во всех случаях, кроме последнего, мы, осуществляя движение треугольника, остаёмся в плоскости, параллельной той, из которой его вырезали. Придя к этим выводам, мы в дальнейшем, устанавливая «равенство» фигур проговариваем вслух этот процесс: как подносим, что совмещаем вначале, что потом.

Обращая внимание на движения в процессе совмещения, мы осуществляем пропедевтику понятия группы движений.

Аксиом у нас всего две:

1. через любые две точки проходит и при том единственная прямая,
2. через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, лежащая в той же плоскости, что эти точка и прямая и параллельная этой прямой.

Всё, далее мы осуществляем цепочку выводов из этих аксиом, не вызывающих сомнений в их обоснованности и логической безупречности у первоклассников. Хотя уже во 2-ом классе мы замечаем, что пользуемся без каких бы то ни было объяснений *существованием* перпендикуляра из любой точки плоскости на любую прямую. Список уже доказанных утверждений (постоянно пополняемый) распечатывается и лежит на парте у детей перед глазами, чтобы им не нужно было бы запоминать, а лишь нужно было бы ориентироваться в нём (при этом, конечно, происходит непроизвольное запоминание часто употребляемых фактов).

Важно подчеркнуть, что все доказательства находятся и проводятся *детьми*, а не учителем. Разумеется, иногда приходится задавать наводящие вопросы, делать намёки, незначительные подсказки в особо трудных случаях (когда, например, для решения поставленной задачи требуются дополнительные построения), но во всех случаях, после напряжённых, зачастую длящихся больше целого урока коллективных усилий, приходит озарение и счастливый ребёнок несётся к доске поведать о своём открытии.

Но учениками добываются самостоятельно (при поддержке и направляющей, координирующей роли учителя) не только доказательства теорем. Ими же ищутся и находятся и определения для тех или иных понятий.

Возьмем, к примеру, определение *смежных углов*. Важно отметить, что это пример отношения (на множестве углов), то есть определение даётся для пары углов. Не имеет смысла говорить об одном, отдельно взятом угле, смежный он или нет. Точно так же, как о вертикальности углов нужны два угла. Два угла могут быть или не быть вертикальными, об одном угле и вопрос ставить нельзя. Это довольно сложный (и не только для школьников младших классов) шаг — переход от определений для отдельно взятых объектов к определению для пар объектов (находящихся в определённых отношениях между собой).

Итак, учитель рисует на доске два угла и предлагает ученикам дать определение, под которое подпадали бы углы, находящиеся по отношению друг к другу в подобном отношении, и не подпадали бы другие пары углов. При этом ученикам приходится выделять скрытые отношения, отделять существенные черты на рисунке от случайных (размеры каждого из углов, взятых отдельно, например), вербализовывать видимые, но неотрефлексированные признаки и так далее.

Примерные попытки таковы: «Это углы, у которых общее начало (вершины углов совпадают)». Учитель обращается к классу: достаточно ли этого? Не может ли кто-нибудь привести пример пары углов, имеющих общую вершину и, тем не менее, не имеющие всех тех признаков, которые имеет пара углов, нарисованных на доске?

Кто-нибудь рисует на своей доске (и после одобрения учителем) демонстрирует всем соответствующий пример. Следующая попытка может выглядеть так: «У этой пары углов должна быть общая сторона». И вновь учитель предлагает поискать контрпример.

После нескольких безуспешных попыток, появляется и он. Таким образом, выясняется неполнота ООД[2], присутствовавших в ранее дававшихся определениях и выяснилась картина полной системы ООД в данном случае: два угла называются *смежными*, если

- Они имеют общую вершину;
- Они имеют общий луч и
- Два других их луча образуют прямую линию.

Точно так же, по этой же схеме находим в ходе направляемой (учителем) совместной деятельности и определение для пары вертикальных углов на основе примеров, нарисованных на доске.

---

[2] Ориентировочных Основ Действия

В первом же классе происходит и первое знакомство с языком математической логики, с высказываниями и их отрицаниями, прямыми и обратными утверждениями, посылкой и заключением импликации. Давались задания сформулировать и доказать теорему, обратную к только что доказанной теореме.

Помимо вышеизложенного, первоклассники учились также работать с циркулем и линейкой, опираясь на доказанные теоремы производить простейшие базовые построения. В составе геометрического блока, после ознакомления с основными приёмами доказательств (в частности, доказательством методом «от противного»), приходит черёд и для темы «величины и измерения». Дети узнают, что бывают линейные меры и угловые, последние несут в себе воспоминания о принятой в древнем мире шестидесятеричной системе счисления. Выясняем, как сравнивать между собой по величине длины отрезков и величины углов. Выясняем, что углы можно измерять в градусах, а можно и в сантиметрах! Тут наступает время и для темы «площадь и периметр». В ходе дискуссии выясняем, что в отличие от случая с углами, когда угловая и линейная меры взаимозаменяемы, меры длины и площади не годятся для сравнения, это просто разные меры, хотя и обладающие общими свойствами.

Другое важное общее свойство длины и площади заключается в том, что если имеются два отрезка и они приставляются концами друг к другу, то длина получившегося большого отрезка равна сумме длин отрезков, его составляющих.

В случае плоских фигур это свойство звучит так: если какая-то фигура составлена из двух других путем приставления их друг к другу, то площадь составленной из них фигуры равна сумме площадей фигур, её составляющих. Это свойство называётся аддитивностью мер площади и длины, но мы пока воздерживаемся от этой терминологии, оставляя её для старших классов. Ещё можно отметить «инвариантность» обоих мер относительно движений: от переносов, поворотов и отражений площадь фигуры (или длина отрезка) не меняется. Слов таких пока на уроках мы не произносим (успеется), но сам факт отмечаем.

Начинаем, естественно, с площадей прямоугольников с целочисленными вершинами и сторонами, параллельными осям координат. Все дальнейшие наши фигуры (многоугольники) также нарисованы на клетчатой доске. Классная доска разлинована в клеточку, таковы же пластиковые доски, имеющиеся у детей на руках.

Затем выясняем, как посчитать площадь прямоугольных треугольников с катетами, параллельными осям координат. Попутно научаемся оперировать с полуцелыми числами. Мир половинок, оказывается, устроен удивительно просто: из двух половинок собирается единичка, а если остаётся лишняя половинка, то её записывают рядом с целым числом. После этого оказывается возможным вычислять площади самых разных замысловатых многоугольников с целочисленными вершинами. Важно лишь уметь правильно разрезать пространство вокруг многоугольника, заключённого в прямоугольную рамку, на прямоугольники и прямоугольные треугольники.

Занятие это — подсчитывать площади разных замысловатых многоугольников, — вызывает повышенный интерес у детей и они готовы заниматься этим бесконечно.

Отметим, что вычисляя эти площади, мы добиваемся, как всегда в подобных случаях, важных побочных эффектов в виде совершенствования вычислительных навыков, умения группировать члены в длинном арифметическом выражении для более удобного и быстрого подсчёта и т.д. Именно такой способ отработки вычислительных навыков — как побочный продукт при выполнении осмысленной и интересной деятельности, при решении содержательных, интересных для детей задач, видится нам наиболее продуктивным и эффективным.

Вычисление площадей прямоугольников, состоящих из целого числа клеточек, не только прямо и непосредственно приводит к понятию умножения, но и позволяет, опираясь на наглядные свойства прямоугольников проиллюстрировать основные правила умножения — коммутативность и ассоциативность, и правило, связывающее умножение со сложением, — дистрибутивность. Заметим, что иллюстрация правила ассоциативности связана уже понятием объёма прямоугольного параллелепипеда.

Опираясь на эти правила, мы начинаем потихонечку, умножая однозначные числа на двузначные, трёхзначные и т.д., выводить правило умножения в столбик. То есть, сначала никаких правил нет. Сначала мы просто составляем, вычисляя с помощью кубиков, таблицы умножения в системах счисления, начиная с троичной и по десятичную систему включительно. Затем выясняем, что происходит при умножении числа на основание системы счисления (все цифры сдвигаются на один разряд вправо). Вычисляя, мы полностью, со всеми подробностями, записываем все промежуточные действия и правила, которые мы при этом используем.

Точно так же, постепенно, начиная с развёрнутого подробного, с проговариванием вслух, и затем постепенного упрощения, сокращения и перевода во внутренний план, мы приходим и к правилу деления уголком (многозначных чисел на однозначные).

Далее возможны варианты: можно продолжать эту тему и перейти к умножению многозначных чисел, а можно ввести понятие степени, корня и логарифма.

Умножение многозначных чисел мы начинали с умножения на двузначное число, разбивая его на сумму десятков и единиц и используя дистрибутивность и свойство умножения на основание системы счисления. При этом вначале, как обычно, мы записываем и проговариваем все действия с максимальной подробностью, отмечая все правила, которыми мы по ходу дела пользуемся.

Освоив умножение, переходим к делению с остатком, определив его, как поиск (решение уравнения) таких чисел для, при которых произведение искомого частного (возможно, неполного) и заданного делителя не превосходит заданного делимого и как можно меньше от него отличается (на число, называемое остатком). Так, если требуется, например, разделить (с остатком) 58 на 4, мы решаем уравнение $58 = 4 \cdot ?+ ?$, где искомые частное и остаток обозначены знаком вопроса. Начиная с материализованного уровня исполнения, мы из кучки в 58 фишек составляем прямоугольник 5×10 и кучку из 8 фишек. Задаёмся вопросом — вот у нас есть пять десятков, а мы хотели бы получить прямоугольник со стороной в 4 фишки (делим-то на 4, то есть, в итоге нам надо будет получить прямоугольник со стороной 4 из наших фишек и небольшую кучку, из которой уже нельзя будет выделить 4 фишки так, чтобы добавить к нашему прямоугольнику, то есть, такой, в которой останется меньше четырёх фишек) — что надо сделать?

— Убрать один лишний десяток, отвечают мне дети.

Хорошо, убираем и получаем прямоугольник 4×10 и кучку из 18 фишек. А как эту кучку разложить в прямоугольник со стороной 4? Берём в руки таблицу умножения и ищем столбик под цифрой «4». Идём по нему вниз до тех пор, пока не найдём самого большого числа из тех, которые не превосходят 18. Это оказывается 16, и мы смотрим влево и находим то число, которое при умножении даст нам 16. Это 4. Мы могли бы и просто руками разобрать кучку в 18 фишек рядами по 4 и также получили бы прямоугольничек 4×4 и оставшиеся две фишки. Этот маленький прямоугольничек присоединяем к большому и получаем прямоугольник со сторонами 4 и 14 и оставшиеся две фишки. Записываем этот результат нашего деления, как $58=4\times14+2$. Называем 58 в этой записи делимым, 4 делителем, 14 (неполным) частным, а 2 — остатком. Мы нашли те неизвестные, которые надо было подставить в уравнение, чтобы оно обратилось в верное равенство. Так мы повторяем несколько раз, постепенно увеличивая делимое и меняя делитель, приходя постепенно к пониманию процесса, называемого делением уголком. Вновь, как и при умножении, для проведения в материализованной форме деления многоразрядных чисел нам помогают системы с малым основанием. Так, деля в четверичной системе счисления трёхзначное число 231_4 на 3 мы должны использовать всего сорок пять фишек — даже меньше, чем в предыдущем примере. Ключевым моментом здесь является именно деление трёхзначных чисел на однозначные, поскольку именно на этом этапе детьми уже усваивается алгоритм, трёх разрядов им оказывается достаточно для усвоения, а переход к высшим разрядам (делению 4-, 5- и более значных чисел на однозначное число) нужен уже лишь для закрепления и отработки навыка.

Переход от умножения к возведению в степень осуществляется так же легко, как переход от сложения к умножению. Напомним, что речь у нас пока идёт о действиях с натуральными числами (и нулём). Если умножение появилось как операция сложения одинаковых чисел, то возведение натурального числа в натуральную степень (других чисел у нас попросту нет!) определяется как операция повторного умножения одного и того же числа на самого себя. Без каких-либо проблем обнаруживается «основное свойство степени» — $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (для натуральных чисел). После чего находим и вытекающее из него ещё одно правило: $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$. Потренировавшись на примерах на вычисление степеней при данных основаниях и показателях степени, переходим к решению уравнений, определяющих обратные операции: извлечение корня и взятие логарифма. Отличаются они только положением вопросительного знака в уравнениях:

$?^a = b$ (извлечение корня степени a из числа b);

$a^? = b$ (взятие логарифма из числа b по основанию a) .

После небольшой тренировки в выполнении этих операций, переходим к примерам, содержащим композиции указанных операций (извлечение корня из логарифма, взятие логарифма от корня, под знаком которого стоит выражение, состоящее из произведения степеней и т.п.).

Следующим пунктом программы является знакомство с понятием последовательности — первым знакомством с понятием функции, заданной в этом случае на множестве натуральных чисел и нуля и имеющей множеством значений то же множество чисел.

Начинаем с самых простых последовательностей, заданных формулой общего члена: $a_n = 2n$; $a_n = 2n+1$; $a_n = 3n$; $a_n = n^2$; $a_n = n^2 - n$; $a_n = n^2 - n + 2$; $a_n = 2n^2 - 3n + 1$ и т.д.

Потренировавшись в нахождении заданного члена заданной последовательности, переходим к построению последовательностей, заданных рекуррентной формулой, начиная с простейших и постепенно усложняя:

$a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, ...$; (арифметическая прогрессия)

$a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n = 0, 1, 2, ...$; (арифметическая прогрессия)

$a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$ (геометрическая прогрессия)

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, ...$; (последовательность Фибоначчи)

Далее, идя по пути усложнения и увеличения числа предыдущих членов последовательности, используемых при вычислении следующего её члена, мы приходим к различным видам последовательностей (например, циклических), в которых вычисление членов с большими номерами достигается экспериментом и исследованием поведения членов последовательности. Этот материал хорошо бы дополнить программированием алгоритмов построения соответствующих последовательностей на уроках информатики. Этим, по существу, исчерпывается программа первого года обучения.

Второй год обучения начинается с расширения понятия числа с натуральных чисел до целых, то есть, с введения отрицательных чисел. Вводится понятие вектора на прямой (как свободного вектора с незакреплённым началом), но с числом связывается «представитель» класса «равных» векторов с началом в нуле. Действия с векторами дают правила сложения для целых чисел
и умножения чисел с разными знаками (мы настаи-
ваем на сохранении правила коммутативности и сохранении правила умножения «старых», т.е., неотрицательных целых чисел). Под сомнением оказывается лишь умножение двух отрицательных чисел. Приводятся различные аргументы (от обычной справедливости — ведь из четырёх возможных вариантов заполнения таблицы умножения целых чисел три нам уже известны и в двух случаях получился «минус», а в одном «плюс») до следующего геометрического:

при построении графиков функций $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ (а мы сразу же переходим к декартовой целочисленной плоскости) мы видим, что получаются точки, лежащие на прямой линии. В области неотрицательных чисел графики функций $y=-x$, $y=-2x$, $y=-3x$ тоже представляют собой точки, лежащие на прямых (на лучах, начинающихся в нуле). Для того, чтобы они продолжали оставаться на тех же прямых и в области отрицательных чисел, должно выполняться правило «минус на минус равняется плюс». Более убедительные аргументы в пользу этого правила, мы оставляем на последующие годы обучения.

Теперь мы в состоянии строить графики различных функций – прямых, парабол, абсолютной величины числа и их комбинаций.

Мы также переходим к правилам действий с векторами на плоскости и учимся находить неизвестный вектор из уравнений типа $2u-x=3v$, где вектора u и v заданы графически. После приобретения достаточного опыта в построении графиков функций по точкам, мы переходим к анализу правил преобразований этих графиков, а именно, построению функций $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$ по заданной графически функции $y=f(x)$, где a — целое число, положительное или отрицательное.

Далее, мы учимся осуществлять композиции этих преобразований, строя по заданному графику функции $y=f(x)$, функции $y=-f(-x)$, $y=-f(x-1)$, $y=|f(|x|)|$, $y=-f(x+1)+1$, $y=f(1-x)$, $y=2-f(3-x)$, $y=1-f(|1-x|)$, $y=|3-f(|2-x|)|$ и т.д.

Мы продолжаем наше изучение геометрии, доказываем, в том числе и с применением векторного подхода, теоремы о средней линии треугольника и трапеции (во всевозможных её вариациях), теорему Вариньона и как следствие из неё теорему о делении медиан треугольника их точкой пересечения в отношении $1:2$. Доказываем теоремы о вписанном и центральном углах, о мере углов с вершиной внутри и вне круга, теорему о перпендикулярности касательной к радиусу, проведённому к точке касания и решаем задачи на построение, использующие эти теоремы.

В программе по математике второго года обучения значатся ещё две темы: исчисление высказываний и исчисление множеств. Мы выводим таблицу правил действий с высказываниями и на её основе проверяем теоретико-множественные тождества.

Затем составляется аналогичная (двойственная) таблица основных теоретико-множественных тождеств, на основании которых потом проверяются произвольные равенства на тождественность.

Во втором из двух классов мы перенесли эти две темы (логику и множества) на третий класс, вставив на их место разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения и группировкой слагаемых с вынесением общего множителя. В любом случае, дальнейшая программа такова:

В третьем классе мы, поупражнявшись с цепочками логических и теоретико-множественных преобразований, упражнений на применение формулы включения-исключения, перешли к бинарным отношениям. Нашли примеры отношений на все комбинации из трёх свойств — рефлексивности, симетричности и транзитивности. Привели и примеры отношений линейного и частичного порядка. Далее, основным примером отношения эквивалентности стало для нас разбиение целых чисел по модулю какого-то выбранного натурального числа. Ввели и проверили на корректность операции сложения и умножения в полученном фактор-множестве, и получили конечные арифметики (арифметики остатков по модулю натурального числа). Вывели основные правила:

$$a \bmod c [+] b \bmod c \equiv (a+b) \bmod c \text{ и } a \bmod c [\times] b \bmod c \equiv (a \times b) \bmod c,$$

где в квадратные скобки заключены арифметические действия с классами чисел, а без — обычные арифметические действия с целыми числами. На основании второго из них получили способ быстрого определения остатка от степени числа и приобрели навык в решении упражнений типа «найти остаток от деления на 8 суммы чисел 5300+11500».

Далее, мы ввели понятия простых и составных чисел и с помощью процедуры «решета Эратосфена»; выявили простые числа в пределах от 2 до 61.

Затем обсудили вопрос, до какого простого делителя нужно проверять неизвестное число, чтобы убедиться в том, что оно — простое.

После этого вывели признаки делимости в десятичной системе на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3,9,11.

Поупражнялись в разложении чисел на простые множители. После этого научились, не производя деления, узнавать остатки от деления на числа, являющиеся произведением этих делителей.

Потренировались в нахождении наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел (основанном на их разложении в произведение их простых делителей).

В четвёртом учебном модуле мы развивали свои логические навыки с применением полученных сведений для решения числовых ребусов. Главной целью для нас было научиться правильно записывать последовательность и обоснование сделанных относительно каждой буквы в ребусе выводов. Заодно потренировались в использовании терминологии и символики математической логики и теории множеств. Чем-то это напоминает запись шахматных партий.

Пятый, предпоследний, модуль был посвящён построению рациональных чисел. Мотивировкой для их введения — та же, что и отрицательных чисел в своё время, — решение уравнений. И если раньше мы искали решения для уравнений вида $a+x=b$, $a,b\in N$, то теперь мы занимаемся уравнением $a\cdot x=b$, $a,b\in Z$. При некоторых (a,b) оно имеет решение в целых числах, при некоторых — нет. Паре (a,b) соответствует точка на целочисленной плоскости. Поскольку при $a=0$ уравнение либо не имеет решений вообще, либо годится любое число, мы это значение для a исключаем. Поскольку мы уверены, что в любом случае сохраняется правило «равенство остаётся верным, если обе его части умножаются на одно и то же число», мы понимаем, что тому же значению x соответствуют и все остальные точки плоскости вида (ca,cb). Таким образом, дробью объявляется любая совокупность точек целочисленной плоскости, лежащая на прямой, проходящей через начало координат, кроме самого начала координат. Сами эти точки называются «представителями дроби». Выясняем сразу же, как умножаются дроби (умножение левых и правых частей уравнений $a \cdot x = b$ и $c \cdot y = d$ приводит к равенству $ac \cdot xy = b \cdot d$), какая из них служит «нейтральным» элементом по умножению, какой элемент является «обратным» к данному и какие прямые соответствуют целым числам. Смотрим, как складываются при этом целые числа и выводим по аналогии, что складывать мы должны тех представителей двух прямых, которые лежат на одной вертикальной прямой, и складываем мы их как обычные целые числа. Проверяем корректность этого определения, наличие нейтральной (нулевой) прямой, обратной по сложению («противоположной») к данной прямой (числу!) и все необходимые свойства сложения и умножения. Опираясь на известную нам упорядоченность целых чисел, видим, что дроби растут по направлению «против часовой стрелки». Легко усматриваем, что между любыми двумя дробями можно вставить третью: любые два луча на бесконечности расходятся далеко друг от друга и между ними появляются точки целочисленной плоскости. Собственно говоря, мы произвели операцию удвоения и факторизации на множестве целых чисел. Нам пригодится этот опыт при построении поля рациональных функций из кольца многочленов через пару лет.

Ну и, наконец, последнее, чем мы занимались в этом году в 3-ем классе — это приложение только что построенных нами дробей к геометрии. А именно, занимались мы гомотетией.

Опыт преподавания по аналогичной программе, начиная с 6-го класса по 11-ый в ГБОУ «Интеллектуал» в 2004–2010 и продолжающийся 4-ый год аналогичный эксперимент с 2009 по настоящее время в старшей школе показал, что, работая напряжённо и непрерывно (в том числе выполняя самостоятельно большие домашние задания на летних каникулах) в течение 6 лет, учащиеся фактически выполняли программу первых двух лет мехмата МГУ, при этом без того напряжения и стресса, который сопровождает там студентов, не подготовленных к «такой» математике, выпускников обычных, не специализированных школ. Ведь им вся информация обрушивается на голову, лекции предлагают уже готовые рецепты и лишь на семинарах они пытаются как-то разобраться в груде информации, которую мы пропускаем через себя постепенно, за 6 лет, доказывая *все* теоремы, которые попадаются нам по пути.

Темпы, с которыми ученики начальной школы в течение первых трёх лет осваивают материал, позволяют надеяться и предполагать, что им удастся — при условии продолжения эксперимента без помех, — качественно и без потери интереса к предмету овладеть к концу обучения в школе математикой в объёме не менее трёх курсов мехмата.

Распространение этого эксперимента позволит не только сформировать выпускников, начинающих высшее образование с качественно нового, более высокого рубежа, но и создать точки профессионального роста для молодых педагогов.

Причём я имею ввиду не только собственно учителей математики — ведь такая математическая подготовка учащихся предоставляет (и предполагает!) совершенно иной уровень преподавания других смежных дисциплин, использующих математику как свой инструмент — физику, химию, биологию, информатику.

Перестройка в соответствии с требованиями современной науки и технологии преподавания математики и смежных дисциплин для отобранных в соответствии с их природными (или сформированными) предрасположенностями детей — вещь совершенно неизбежная и неотвратимая. Вопрос лишь в том — где, когда и как это произойдёт.

Литература

[1] Абрамсон Я.И. Преподавание математики (авторская программа) в НОУ "Школа Алеф" (2007/2008 уч/год), http://festival.1september.ru/articles/511767/

[2] Абрамсон Я.И. Авторская программа преподавания математики в школе-интернате для одаренных детей "Интеллектуал", http://festival.1september.ru/articles/579242/

[3] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 1-й класс (2010/2011 уч/ год) http://festival.1september.ru/articles/602405/

[4] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 2-й класс (2011/2012 уч/ год)
http://festival.1september.ru/articles/619698/

[5] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 3-й класс (2012/2013 уч/ год)
http://festival.1september.ru/articles/631585/

[6] Абрамсон Я.И. Математика. 1 класс. Книга для учителя. Политехника-сервис, 2012.